ARTIGO

Dinâmicas Complexas em Modelos Econômicos Simples

Marcos Godinho*

Introdução

Alguns temas na Teoria Econômica têm a característica de serem recorrentes; sempre retornam ao debate com uma certa regularidade, como são os casos da natureza auto-corretiva dos sistemas econômicos e o da instabilidade do equilíbrio[1]. Combinados, estes temas evidenciam a característica não-linear dos sistemas econômicos que, de alguma forma, são instáveis nos seus núcleos. O retorno destas questões reforça o fato de que a teoria econômica ainda, não conseguiu explicar de forma satisfatória o equilíbrio econômico.

A instabilidade gerada por movimentos cíclicos e caóticos, aparentemente, não são compatíveis com a idéia de equilíbrio geral walrasiano. Durante os últimos 30 anos a metodologia de estudo dos sistemas não-lineares avançou muito. Os sistemas caóticos tornaram-se cada vez mais comuns em várias áreas do conhecimento, *e.g.*, Biologia, Física, Química, Meteorologia e Economia. Com o foco neste novo campo de pesquisa[2] podemos afirmar que apesar dos sistemas dinâmicos complexos não apresentarem um equilíbrio da forma esperada pela Teoria do Equilíbrio Geral, isto não quer dizer que estes equilíbrios não tenham interesse teórico, pelo contrário, o caos determinístico corrobora e muito no entendimento das flutuações cíclicas[3].

Grandmont (1992) demonstrou que em uma economia monetária competitiva, em que o ambiente é estacionário, haverá flutuações determinísticas de grande duração e persistência sob um regime de *laissez faire*, contradizendo a visão corrente de que qualquer desvio da trajetória de longo prazo do equilíbrio walrasiano deva ser considerado como puramente transitório. Com esta demonstração, representar o sistema através de um modelo que gerasse um equilíbrio estacionário tornou-se questionável. Apesar dos economistas observarem este problema em seus modelos de ciclos econômicos, o máximo alcançado foi inserir uma variável estocástica, procurando com isto gerar choques externos ao sistema. Infelizmente, estes modelos conseguiam apenas preservar o equilíbrio estacionário sem contudo explicar o fundamental, *i.e.*, os ciclos econômicos.

Este artigo tem por objetivo apresentar a Teoria do Caos sob uma linguagem simplificada para que os economistas que não tenham formação matemática possam apreciar e mensurar o impacto do caos sobre a Teoria Econômica. A inspiração para este enfoque foi o trabalho de Robert May *"Simple mathematical models with very complicated dynamics"*, publicado em 1976 na revista *Nature*. Neste artigo May desenvolveu um sistema dinâmico discreto não-linear para introduzir a Teoria do Caos Determinístico. No presente trabalho usaremos o modelo descrito por May para apresentar algumas conclusões curiosas sobre a teoria. A ordenação será a seguinte: na pri-

---

[1] *Com freqüência maior na literatura dos ciclos econômicos.*
[2] *principalmente nos conceitos de atratores estranhos e órbitas estáveis.*
[3] *Principalmente porque não precisamos gerar choques externos irrealistas com a finalidade de explicar os dados econômicos.*

meira seção apresentamos uma breve história sobre a utilização dos modelos matemáticos em economia terminando com uma consideração sobre os modelos complexos. A segunda parte apresenta uma introdução da teoria do caos. Enquanto na terceira seção desenvolvemos um modelo econômico simples que apresenta movimentos caóticos. A última seção contém as conclusões do artigo.

1. Uma Breve História da Economia Matemática

A Escola Matemática data de meados do século passado, com as contribuições de Cournot, Walras e Jevons. Na mesma época, se dá o surgimento da Escola Marginalista (Neoclássica) e isso não é uma feliz coincidência, já que seus membros criaram alguns dos pressupostos, "equivocados", necessários para o desenvolvimento dos primeiros modelos econômicos. As hipóteses neoclássicas, convenientemente, construíram um mundo econômico perfeito, longe de todo caos social que o capitalismo da época enfrentava. Este mundo perfeito tornou-se o verdadeiro objeto da Teoria Econômica Moderna. [4]

Os pressupostos hedonistas de Bentham tiveram uma influência muito grande nos economistas marginalistas do século XIX. Todas as regras de comportamento dos agentes econômicos, a hipótese da maximização da utilidade [5] e muitos outros pressupostos transformaram a economia em um grande modelo matemático. Os esforços dos economistas, e mais tarde dos econometristas, foram o de *explorar* este mundo teórico em busca da melhor especificação funcional que mais se aproximasse do modelo *verdadeiro*, além de tentar desvendar as leis de movimentos das variáveis chaves da economia.

Portanto, este ledo engano não é exclusivo dos economistas, mas sim de quase todos os cientistas dos séculos XIX e XX. Talvez a maior razão para este equívoco teria sido a grande influência da lógica aristotélica - que busca explicar todos os eventos através da causalidade. Esta forma de raciocínio moldou a maneira ocidental de pensar e até mesmo de explorar o universo, já que formalizamos todas as questões sob a perspectiva de causa e conseqüência. Um outro elemento que veio contribuir para a nossa forma de buscar respostas às nossas indagações científicas foi o isomorfismo [6] de Descartes, gerado de uma matemática universal que conduziu às possibilidades de formalização de teorias divergentes [7].

Além das questões anteriores, os economistas ao aceitarem a hipótese da unicidade do equilíbrio geral, ou seja, a existência de um único vetor preço que equilibre a oferta e a demanda em todos os setores da economia gerou mais um equívoco. Esta premissa, implicitamen- te impôs a linearidade dos merca dos, já que este tipo de equilíbrio facilmente atingido em modelo lineares. Não sabemos, entretant se os modelos não-lineares fora evitados por reconhecer a sua c pacidade de gerar complexidad sem aleatoriedade, ou por causa crença de que o mundo real pod ria ser melhor representado p equações lineares [8].

Se o equilíbrio geral era o objet dos economistas, nem todos os forços de criarem pressupostos, como os da racionalidade dos ag tes, informação perfeita e o con to de convergência de Wal *tâtonnement*, poderiam mant estabilidade do modelo. A r mais importante para o frac dos primeiros modelos mater cos em economia foi devido a linearidade intrínseca destes m los, gerando trajetórias instáve longo do tempo. Apesar dos e ços de vários economistas, Clark e Pigou, em criarem t que garantissem a lógica inte teoria neoclássica, a não-li dade continuava a aparece modelos econômicos.

---

[4] *Para ser mais preciso poderíamos dizer de a tradição neoclássica.*
[5] *Conceitos básicos do homo economicus.*
[6] *Termo utilizado por Damásio(1994), explicando a semelhança entre os modelos matemáticos e a realidade observada.*
[7] *Este ponto de vista é tratado extensivamente por Bertrand Russel (1938) e por Araújo (1994).*
[8] *Talvez este não seja o caso, já que mais tarde alguns modelos não-lineares foram adotados, como é o caso dos modelos de crescimento, funções de produção cobb-douglas e de CES, que de alguma forma são bem comportadas.*

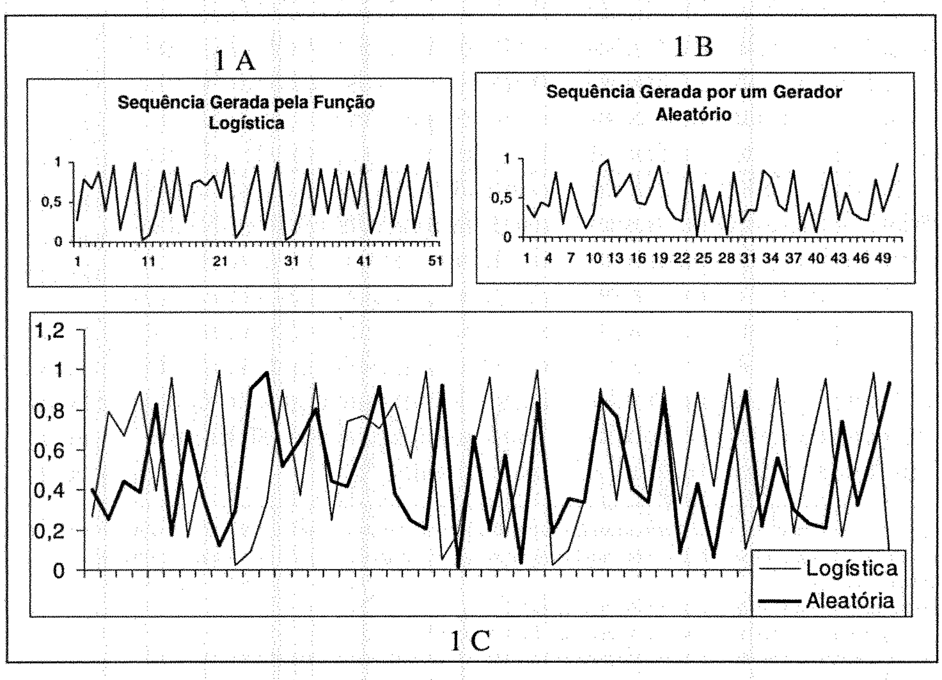
Outros dois problemas que também estavam na essência do desenvolvimento da economia matemática eram: os modelos dinâmicos, com sua representação explícita do tempo, que não gerava problemas de convergência quando as trajetórias eram de estado estacionário e os problemas gerados pelo aumento de dimensões dos modelos que não convergiam. Várias soluções foram criadas durante a primeira metade deste século, mas todas retiravam dos modelos exatamente a sua característica mais importante que era a diversidade de trajetórias. Para uma avaliação mais detalhada sobre estes modelos ver Damásio (1994).

Para os economistas, a questão não era a de moldar a realidade à teoria econômica, mais sim a de modelar a teoria à realidade observada. Durante muitos anos parecia que esta verdade aparentemente simples tinha sido esquecida. Apesar de existirem vários modelos onde variáveis estocásticas faziam o papel de não-linearidade, gerando trajetórias cíclicas e erráticas. Mesmo assim estes não podiam explicar o que atualmente conhecemos com a ajuda dos modelos não-lineares, como por exemplo, as flutuações irregulares ao longo do tempo com um padrão repetitivo, ou o conceito de Universalidade de Feigenbaum e por último a descoberta de estruturas estáveis sem aleatoriedade a partir de observações do mundo real, *i.e.*, na essência dos fenômenos econômicos observáveis. A pretensão dos economistas matemáticos dos últimos 100 anos era exatamente esta, ou seja, descobrir as leis que regiam a economia.

1.1. Os Modelos Não-Lineares em Economia

Os últimos 25 anos foram de fundamental importância para a ciência, já que uma nova concepção acerca da dinâmica dos fenômenos que evoluem no tempo começou a ser desenvolvida. A descoberta matemática da dinâmica caótica dos sistemas não-lineares transformou a nossa maneira de prever o comportamento dos sistemas dinâmicos. O adjetivo caótico transmite a idéia da capacidade de alguns sistemas dinâmicos apresentarem trajetórias erráticas próximas das trajetórias geradas por equações probabilísticas. As Figuras (1A, 1B e 1C) apresentam duas curvas, que apesar de apresentarem o mesmo padrão, foram geradas de forma bem diferentes, uma através de uma equação determinística, função logística, e a outra através de uma variável probabilística.

Figura 1



[9] *Especialmente os não-lineares.*

A economia como qualquer outra ciência não está imune a estes tipos de trajetórias. Pelo contrário somos mais susceptíveis a este tipo de problema, já que o próprio comportamento dos agentes econômicos através das suas expectativas tornam os modelos lineares simples em modelos não-lineares[10], como é o caso do teorema de Cobweb, que iremos tratar em seguida.

Os modelos de crescimento econômico eram classificados como modelos de crescimento exógenos, onde os choques externos eram usados para explicar as flutuações econômicas, e uma vez passadas a economia voltaria a sua trajetória normal; ou em modelos de crescimento endógenos, onde se procurava estudar os mecanismos internos que poderiam ser responsáveis pelas flutuações nos preços e quantidades em um determinado mercado. No modelo Keynesiano, por exemplo, os ciclos econômicos poderiam ser gerados através da interação do multiplicador com o acelerador[11]. Outros trabalhos nos moldes dos modelos de crescimento endógenos são os trabalhos de Harrod, Kalecki, Samuelson, Schumpeter, Wicksell e Hayek, na década de 30; Meltzer e Kaldor na década de 40; Goodwin e Hicks na década de 50; e Rose e Haberler na década de 60.

A Teoria do Caos Determinístico, através dos estudos das dinâmicas complexas em sistemas determinísticos foi o principal elemento para o reavivamento da teoria dos ciclos endógenos. Pois atualmente, os economistas estão conscientes de que mesmo na ausência de choques externos, a economia poderá continuar apresentando órbitas periódicas complexas, tornando-se difícil de distinguí-los das séries temporais puramente estocásticas.

2. *A Teoria do Caos*[12]

Precisar o momento da descoberta da teoria do caos é uma tarefa difícil, já que os matemáticos e físicos do século passado já tinham ciência da existência de órbitas caóticas em sistemas dinâmicos não-lineares. Henri Poincaré sabia que sistemas dinâmicos não-lineares de baixa dimensão poderiam exibir comportamentos complexos, aparentemente aleatório. A impossibilidade de calcular estas trajetórias, ou de resolvê-las numericamente limitou grandemente as pesquisas nesta área da matemática durante aqueles anos. As soluções qualitativas, muitas das vezes, não eram suficientes para entender um fenômeno complexo, como órbitas caóticas. Somente com o surgimento dos computadores digitais é que tornaram possíveis o cálculo destas trajetórias.

Atualmente existem várias definições de caos, e a que usaremos será aquela apresentada pela *Royal Society Conference on Chaos*, em 1986, onde se definiu da seguinte forma: Sistemas determinísticos com comportamento estocástico. Esta definição, apesar de parecer contraditória, pois os modelos deterministas não tem possibilidade de apresentarem movimentos aleatórios, já que estes são exclusivos dos modelos probabilísticos, ela encerra a essência da teoria do caos e levanta uma questão muito importante, a qual nos referiremos mais adiante.

O que queremos dizer é que, além dos ruídos externos[13] existem pelo menos outras duas fontes de aleatoriedade dos sistemas dinâmicos não-lineares que são: não-linearidade intrínseca dos sistemas e sensibilidade dos sistemas com relação aos valores de contornos do modelo[14]. Para a Economia estas fontes geradoras de órbitas caóticas nos modelos matemáticos são de extrema importância, já que a grande maioria dos modelos econômicos sofrem algum tipo de aleatoriedade.

O primeiro estudo sobre órbitas caóticas foi o estudo de Lorenz (1963), onde foi desenvolvido um modelo dinâmico com órbitas caóticas estáveis, o que era impossí-

---

[10] *Isto ocorre porque se torna necessário modelar explicitamente o comportamento otimizador dos agentes envolvidos. O mais interessante é que assim reavivamos uma idéia antiga, especialmente keynesiana, de que os ciclos econômicos são causados pela volatilidade das expectativas. Grandmont (1987).*

[11] *Para uma análise mais detalhada ver Zarnowitz (1985).*

[12] *Para uma introdução não matemática sugerimos Gleick (1987).*

[13] *Variáveis aleatórias que interferem no sistema.*

[14] *Este fonte de aleatoriedade consiste, também, na incapacidade de mensuração perfeita das variáveis físicas, principalmente, em uma precisão infinita.*

vel de acontecer de acordo com as teorias dos sistemas dinâmicos, já que estes não poderiam apresentar comportamentos irregulares estáveis[15]. Os sistemas dinâmicos poderiam apresentar órbitas estáveis e instáveis ao mesmo tempo, como é o caso de colocarmos um lápis em pé sobre a sua ponta. Neste caso, o sistema era instável, pois qualquer variação no sistema, choque exógeno, levaria o modelo para longe da posição de equilíbrio. O mesmo não aconteceria com uma bola de futebol dentro de uma piscina vazia, pois qualquer variação na posição inicial, ou a existência de um choque externo, não afetaria a posição de equilíbrio do modelo.

Porém Lorenz em seus estudos provou que o sistema de equações diferenciais utilizados para explicar as variações meteorológicas ao longo do tempo apresentava movimentos irregulares mas estáveis ao longo do tempo. A figura abaixo mostra a órbita gerada pelo modelo de Lorenz. Apesar do sistema apresentar órbitas limitadas, dentro de um intervalo, porém, elas nunca se repetirão.

Para podermos ver a sensibilidade dos modelos caóticos à pequenas variações nos valores de contorno apresentamos a seguir o mesmo modelo de Lorenz com uma variação pequena nos seus valores de contorno.

Figura 2

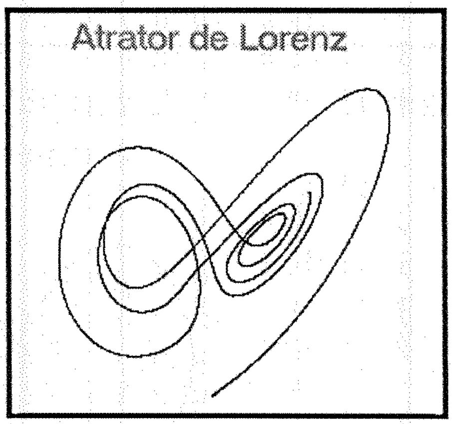
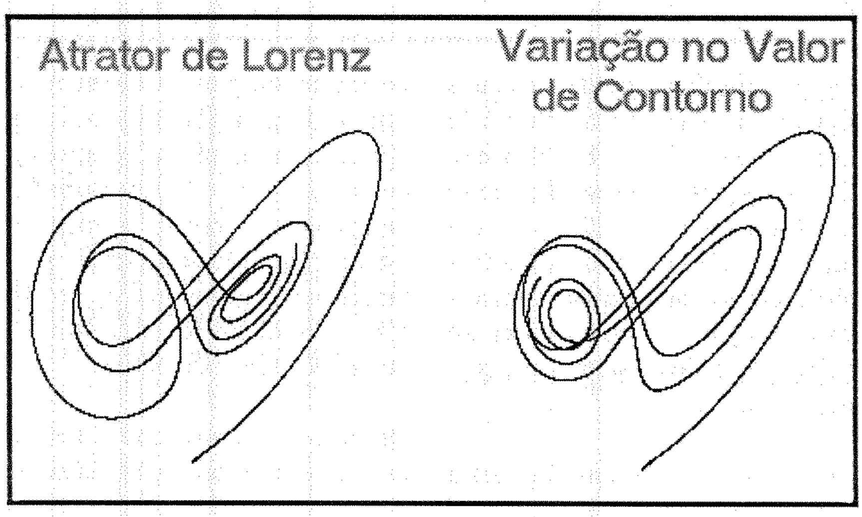
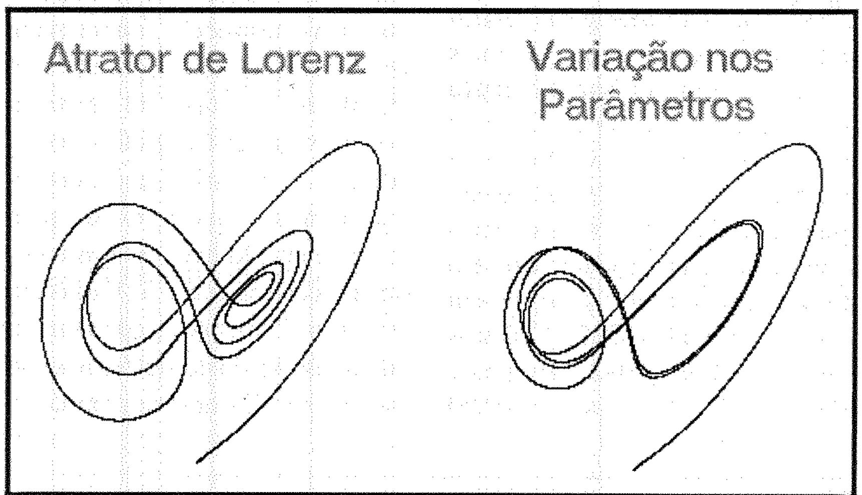


Figura 3



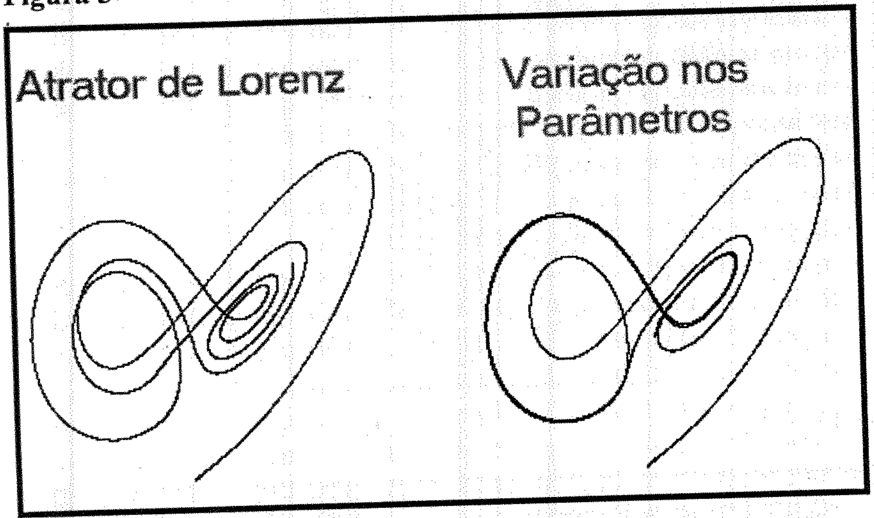
E por último vamos mostrar o que acontece para pequenas variações nos parâmetros do modelo de Lorenz.

Figura 4



[15] *Esta propriedade é conhecida por "Estabilidade de Smale"*

Figura 5



Os gráficos da esquerda, nas duas figuras acima, mostram o atrator de Lorenz para os valores originais. Os outros dois gráficos da direita mostram uma variação positiva menor de 1% nos valores dos três parâmetros e uma variação negativa menor de 1% nos valores de apenas dois dos parâmetros, respectivamente.

Este exemplo apresentado ilustra de forma simples as idéias mais importantes da Teoria do Caos. Várias outras implicações existem, como é o caso do Efeito Borboleta[16], geometria fractal[17] e universalidades[18], que são de grande importância para a economia, e que não foram abordados aqui devido a sua complexidade matemática.

Durante os últimos anos a literatura sobre caos cresceu rapidamente em diferentes áreas como economia, física, matemática, biologia, ecologia, química e meteorologia. Os fenômenos ligados à Turbulência, que muito intrigavam os físicos, começaram a serem estudados através de modelos simples com trajetórias complexas. O trabalho mais importante para tornar popular, no meio matemático, o caos foi Li e Yorke, *Period Three implies Chaos*, provando que os sistemas não-lineares que apresentavam caos não eram as exceções como se imaginava, mas a regra geral.

Atualmente as pesquisas referentes a Teoria do Caos seguem 3 caminhos principais, que são: Investigação matemática dos sistemas dinâmicos não-lineares; Aplicações dos resultados teóricos em modelos reais; e Análises de sinais experimentais. Durante os próximos anos provavelmente novos resultados irão surgir, tornando a Teoria do Caos um ramo fascinante de pesquisa teórica e prática.

3. O Modelo da Teia de Aranha e Teoria do Caos

O modelo tem sido estudado exaustivamente na literatura econômica, parece que já é mais ou menos padrão a sua utilização para ilustrar a Teoria do Caos. O nosso objetivo nesta seção é o de gerar uma variação do modelo original, e assim estudar a sua complexidade dinâmica, como é o caso de Hommes (1994), Artstein (1983), Chiarella (1988), Finkenstädt e Kuhbier (1992), Homes e Manning (1988), Hommes (1995) e Baulmol e Quandt (1995). Existem várias maneiras para transformarmos este modelo linear em um não-linear, as mais comuns são: transformar a curva de oferta linear em uma função logística, que foi adotada neste artigo, ou transformá-la em uma função com um ponto de saturação bem determinada, que é o caso da curva S. Várias outras transformações poderiam ser adotadas, ao custo de termos um modelo não-linear mais complexo.

A opção pelo modelo Cobweb (devido a sua simplicidade econô mica e pela sua importância n entendimento sobre o papel da expectativas na estabilidade do sis tema, como foi provado pc Nerlove em 1958, quando este ad cionou uma nova equação, com finalidade de explicar o impac das expectativas adaptativas n modelos econômicos. A conclusã que ele chegou era de que o mod

[16] *Para maiores detalhes veja Gleick (1987).*
[17] *Um trabalho mais completo sobre o assunto é Stewart (1984)*
[18] *Para maiores detalhes veja Cvitanovic (1989) e Bai (1989).*

lo Cobweb apresentava uma trajetória estável ao longo do tempo devido às expectativas. É importante lembrar que Nerlove estava trabalhando com um modelo linear. A pergunta que tentaremos responder é esta : *qual seria o comportamento dos preços em uma versão não-linear do modelo Cobweb ?*

3.1 O Modelo Linear Cobweb[19]

O modelo Cobweb é um sistema dinâmico derivado do caso estático de oferta e demanda. O modelo assume que a oferta reage a uma variação de preços com uma defasagem de um período, enquanto que a demanda depende do preço corrente. A razão para esta defasagem reside no fato da produção não ser instantânea, isto é, necessita de um período fixo de tempo para se produzido.

Equação 1

$$D_t = a + b \cdot p_t$$
$$S_t = a_1 + b_1 \cdot p_{t-1}$$
$$D_t = S_t$$

A solução da equação 1 é :

$$p_t = (p_0 - p_e) \cdot \left(\frac{b_1}{b}\right)^t + p_e$$

onde:

p_0 = preço inicial

p_e = preço de equilíbrio do modelo estático[20]

O comportamento do preço ao longo do tempo, irá depender do valor absoluto de b_1 em relação a b, já que $b_1/b < 0$. Desta forma os preços oscilarão em torno do valor de equilíbrio. As oscilações podem ser explosivas, de amplitude constante ou amortecidas de acordo com $|b_1| > |b|$ ou $|b_1| = |b|$ ou $|b_1| < |b|$.

O que aconteceria se os produtores utilizassem as suas expectativas na definição da sua produção ao invés de praticar os preços passados ? Teríamos um modelo com expectativas adaptativas, sendo que a quarta equação expressa a lei de formação das expectativas.

Equação 2

$$D_t = a + b \cdot p_t$$
$$S_t = a_1 + b_1 \cdot \bar{p}_t$$
$$D_t = S_t$$
$$\bar{p}_t = p_{t-1} + c(p_{t-1} - p_{t-2})$$

Onde:

$\bar{p}_t$ = expectativa de preço

c = acelerador das expectativas

Depois de algumas substituições chegamos a seguinte equação de segunda ordem de diferenças finitas:

$$b \cdot p_t - b_1 \cdot (1+c) \cdot p_{t-1} + b_1 \cdot c \cdot p_{t-2} = a_1 - a$$

A posição de equilíbrio é a solução para o caso não homogêneo[21] assim ficaria:

$$p_e = \frac{a_1 - a}{b - b_1}$$

A função característica do modelo é:

$$\lambda^2 - \frac{b_1 \cdot (1+c)}{b} \cdot \lambda + \frac{b_1 \cdot c}{b} = 0$$

As condições de Estabilidade da equação são:

Equação 3

$$\begin{cases} 1 - \frac{b_1 \cdot (1+c)}{b} + \frac{b_1 \cdot c}{b} = 1 - \frac{b_1}{b} > 0 \\ 1 - \frac{b_1 \cdot c}{b} > 0 \\ 1 + \frac{b_1 \cdot (1+c)}{b} + \frac{b_1 \cdot c}{b} = 1 + \frac{b_1 \cdot (1+2 \cdot c)}{b} > 0 \end{cases}$$

---

[19] *Para maiores detalhes ver Gandolfo (1997)*

[20] *P_e é a solução do caso não homogêneo. Assim $P_e = \frac{a_1 - a}{b - b_1}$, que é exatamente a solução do modelo quando $p = p_t = p_{t-1}$.*

[21] *A solução do caso não homogêneo é também a solução do modelo estático, como vimos anteriormente.*

Supondo $c > 0$, a primeira e a segunda inequações são satisfeitas e a terceira inequação pode ser transformada para :

$$\frac{b_1}{b} < \frac{1}{1 + 2 \cdot c}$$

já que $1/(1 + 2 \cdot c) > 1$, então a condição de estabilidade[22] no modelo com expectativa é bem mais restritiva do que no modelo original.

Supondo $c < 0$, a primeira inequação é satisfeita enquanto que as outras duas ficariam:

A segunda equação:

$$\frac{b_1}{-b} < \frac{1}{-c}$$

enquanto que a terceira :

$$\frac{b_1}{-b} < \frac{1}{1 + 2 \cdot c}$$

A inequação mais restritiva irá depender do parâmetro[24] c. Assim podemos concluir o seguinte : *O fato dos produtores esperarem que os preços mudem de sentido é um elemento de estabilidade do modelo. Desta forma, as condições de estabilidade têm que ser mais restritivas do que no modelo original, i.e., sem expectativas.*

Esta conclusão já é bem conhecida pelos economistas, segundo Nerlove as expectativas tornam o modelo Cobweb mais estável. A pergunta que queremos responder agora é a seguinte: Se variarmos a equação de oferta e a de formação das expectativas de modo que o modelo se torne em um modelo quadrático, a estabilidade será preservada?

3.2. O Modelo Cobweb Não-Linear

O primeiro passo é transformar o modelo linear em um modelo não-linear. Com este objetivo vamos manter a curva de demanda linear, e utilizar uma versão não-linear da curva de oferta. A dinâmica dos preços será descrita por uma equação recursiva e não-linear, $x_{t+1} = f(x)$.

Existem algumas variações possíveis no modelo Cobweb para transformá-lo em um modelo que gere órbitas complexas. Geralmente utiliza-se uma função não-linear para descrever o comportamento da oferta ou para descrever o processo de formação das expectativas, que neste caso são do tipo adaptativas. Hommes (1995) optou por um modelo onde a curva de oferta é do tipo S-shaped. Esta escolha tem mais significado econômico do que o modelo que foi optado, tipo quadrática. Mas o que motivou a escolha da curva logística foi devido a sua simplicidade e da sua característica[25] didática em relação ao modelo de Hommes.

O modelo geral é: **Equação 4**

$$\begin{cases} Q_t^d = D(p_t) \\ Q_t^s = S(p_t^e) \\ Q_t^d = Q_t^s \\ p_t^e = p_{t-1}^e + w(p_{t-1} - p_{t-1}^e) \end{cases}$$

onde :

$0 \le w \le 1$

p_t^e = expectativas dos produtores

Como sabemos através da escolha correta das funcionais para as curvas de demanda e oferta, poderemos aproximar o modelo por uma equação de diferenças finitas não-linear da forma $p_{t+1} = \mu \cdot p_t \cdot (1 - p_t)$.

Mesmo considerando que este modelo não pode ser aplicado para explicar o movimento dos preços em um determinado mercado, ele serve para ilustrar a grande variedade de movimentos que devemos esperar quando estivermos trabalhando com modelos mais realistas. A lição mais importante que podemos aprender com este modelo é que apesar do movimento dos preços parecerem randômicas, como geralmente se acredita, muitas vezes poderíamos, com auxilio

[22] *Não estamos considerando o caso em que as expectativas estão movendo na direção que estão os preços, pois neste caso teríamos que estudar o que aconteceria com o discriminante da função característica, e isto está além do que nos propomos aqui.*

[23] *Isto ocorre para* $c > -\frac{1}{2}$. *Nos outros casos a inequação é sempre satisfeita.*

[24] *A análise e o desenvolvimento dos valores de c estão em Gandolfo (1997).*

[25] *Este é o objetivo principal deste artigo.*

da teoria do caos, descobrir alguns padrões nas flutuações de preços e assim melhorar a capacidade de previsão das oscilações nos preços[26].

Retornando para a nossa função :

Equação 5

$$p_{t+1} = \mu \cdot p_t \cdot (1 - 0.001 p_t)$$

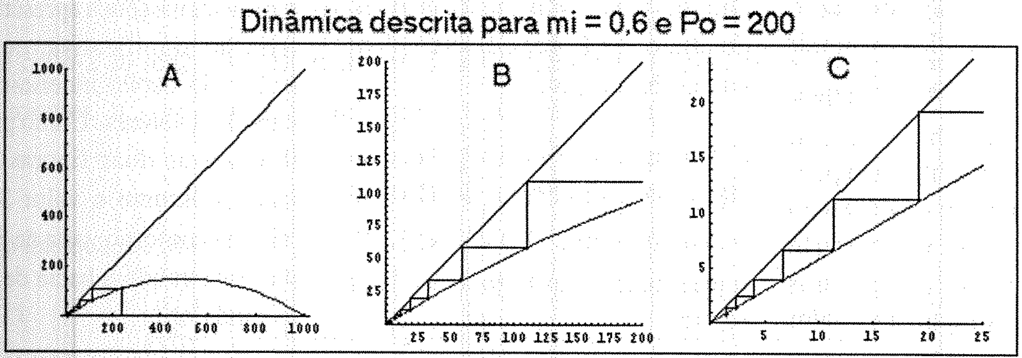
Esta equação explica a trajetória dos preços ao longo do tempo. À primeira vista parece não apresentar dificuldade nenhuma para análise. Mas quando analisamos o comportamento para vários valores de μ é que percebemos a rica variedade de comportamento.

3.2.1. Propriedades Dinâmicas da Equação 5[27]

A dinâmica da equação 5 é determinada pelo parâmetro μ, isto é, para diferentes valores teremos trajetórias diferentes. As Figuras de 6 a 15 representam as várias simulações da equação para valores de μ, no intervalo [0,4].

a) Dinâmicas descritas, pela equação 5, para o intervalo de μ compreendido entre $0 < \mu < 1$, representadas na Figura 6, a seguir.

Figura[28] 6



Podemos perceber que

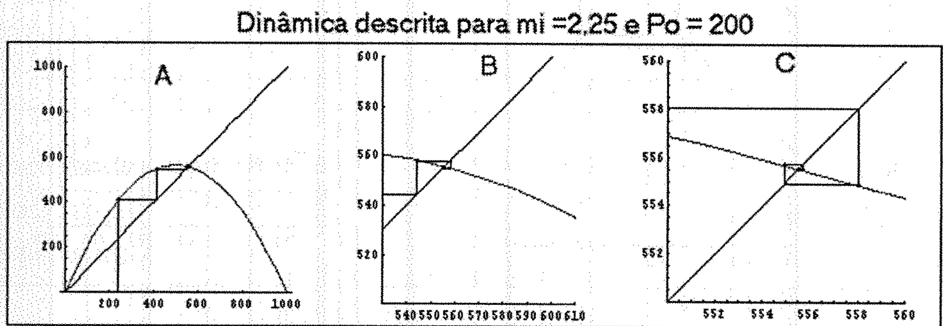
$$\lim_{t \to \infty} p_t = 0$$

Isto ocorre para qualquer valor de contorno de p_t. Este limite é alcançado para qualquer valor de μ, menor do que 1. O que queremos dizer que **0** é o ponto fixo da nossa equação.

O que aconteceria para valores de μ maior do que 1. As dinâmicas sofrem uma grande mudança qualitativa, isto ocorre por causa dos efeitos da não-linearidade do modelo.

b) Dinâmicas descritas, pela equação 5, para o intervalo de μ compreendido entre $1 < \mu < 3.0$, representadas nas Figuras 7 e 8, a seguir.

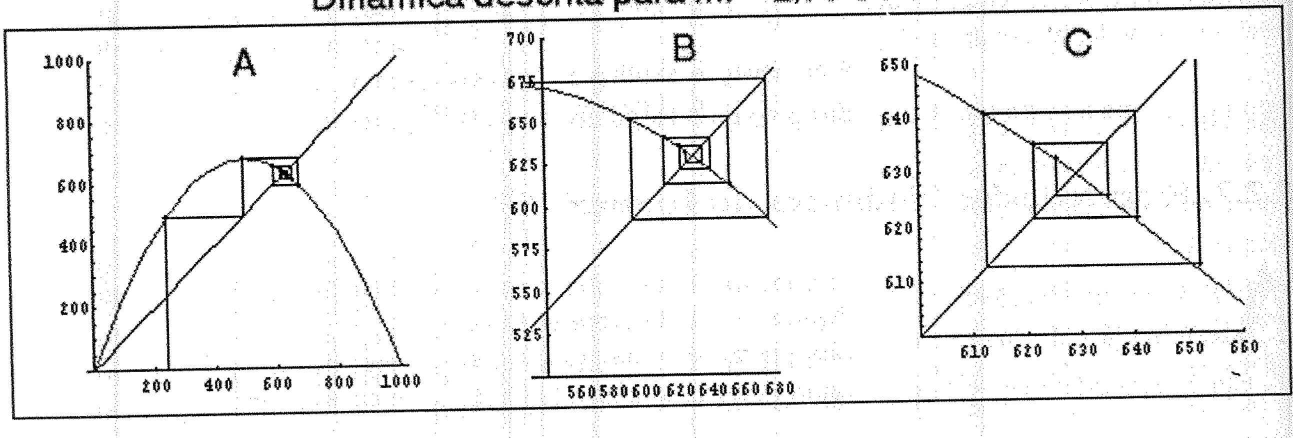
Figura 7



[26] *O mercado financeiro vem utilizando modelos não-lineares para entender a característica interna dos mercados financeiros.*
[27] *Esta seção baseia-se nos trabalhos de Savit (1995), Weiss (1995), Hommes (1995) e May (1976).*
[28] *Nas Figuras 6 a 10 a letra grega μ foi substituída por "mi".*

Figura 8

Dinâmica descrita para mi = 2,75 e Po = 200



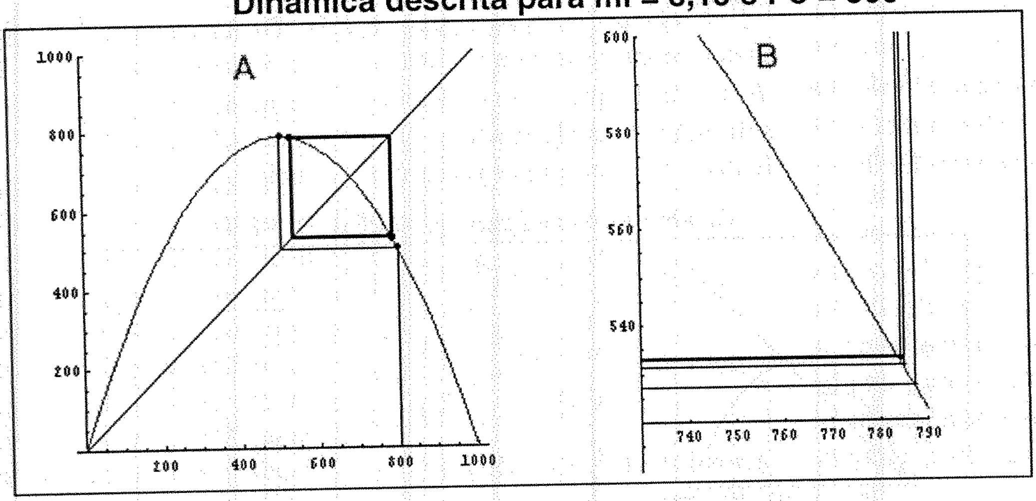
Para estes valores de μ nossa equação apresenta um ponto fixo[29], que tem a característica de atrair as trajetórias de p_t. Para qualquer valor de contorno sobre o eixo x, com exceção da origem, tem o ponto fixo como bacia de atração para qualquer valor de μ no intervalo [1,3]. As bacias de atração nos mostram que, para qualquer valor de contorno, as trajetórias serão atraídas para o ponto fixo. No caso do atrator de Lorenz existem duas bacias de atração.

c) Dinâmicas descritas, pela equação 5, para o intervalo de μ compreendido entre $3.0 < \mu < 3.50$, representadas nas Figuras 9 e 10, a seguir.

Quando μ atinge o limite 3, as trajetórias começam a apresentar uma variação significativa, ou seja, a seqüência oscila indefinidamente entre dois valores. Como podemos observar as duas figuras abaixo, onde μ assume o valor 3.15 e o valor de contorno varia de 800 para 100, mostrando a bacia de atração do modelo.

Figura 9

Dinâmica descrita para mi = 3,15 e Po = 800

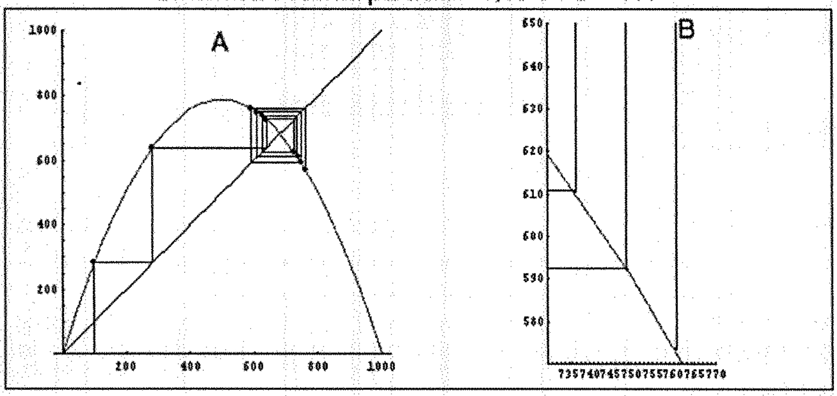


[29] *Na realidade o modelo apresenta dois pontos fixos, pois o valor de p_t=0 é um ponto fixo com característica de repelir as trajetórias de p_t.*

A Figura B, da direita, é um "zoom" da seção do gráfico que contém um dos valores cíclico da seqüência. O valor de contorno não é muito importante, já que a longo prazo a trajetória de p_t irá convergir para este ciclo limite, ou ciclo-2, como podemos observar na Figura 10, a seguir.

Figura 10

Dinâmica descrita para mi = 3,15 e Po = 100



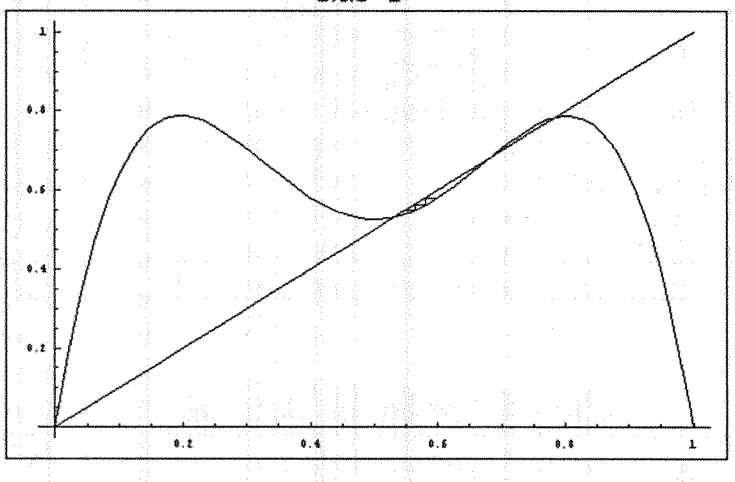
Se existe ciclo-2 ao longo do tempo poderemos verificar a existência de um comportamento de ponto fixo, quando fazemos $p_{t+2} = f(p_t)$, assim teremos a seguinte equação:

$$p_{t+2} = \mu^2 \cdot (1-p_t) \cdot p_t \cdot [1-\mu \cdot (1-p_t) \cdot p_t]$$

O gráfico da equação 6 fica :

Figura 11

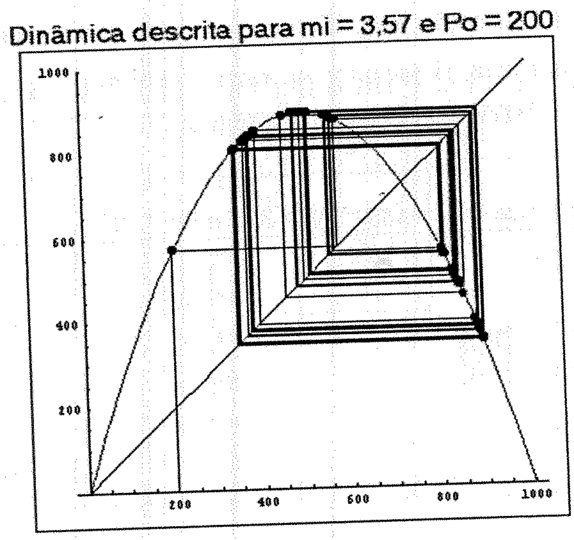
Ciclo - 2



As três interseções correspondem aos dois pontos do ciclo-2 e ao ponto fixo da equação inicial, equação 5.

Várias outras trajetórias aparecem quando $\mu \to 3.449$ que agora irá apresentar ciclo-4, este processo irá ocorrer até que μ atinja um determinado valor, e o ciclo-4 bifurca-se em ciclo-8, e mantém-se estável durante certos valores de μ, até bifurcar-se em ciclo-16. Este fenômeno não ocorrerá indefinidamente, mas sim até o ponto que $\mu \approx 3.5699$, na qual o 2^n-ciclo não mais descreverá o movimento dos preços a longo prazo. Neste valor o ciclo se tornará infinito nunca se repetindo, como podemos observar no gráfico da Figura 12, a seguir.

Figura 12



Para podermos perceber que o ciclo é infinito, reproduzimos os gráficos de ciclo-2, ciclo-4 e ciclo-8, nas Figuras 13, 14 e 15, a seguir.

Figura 13

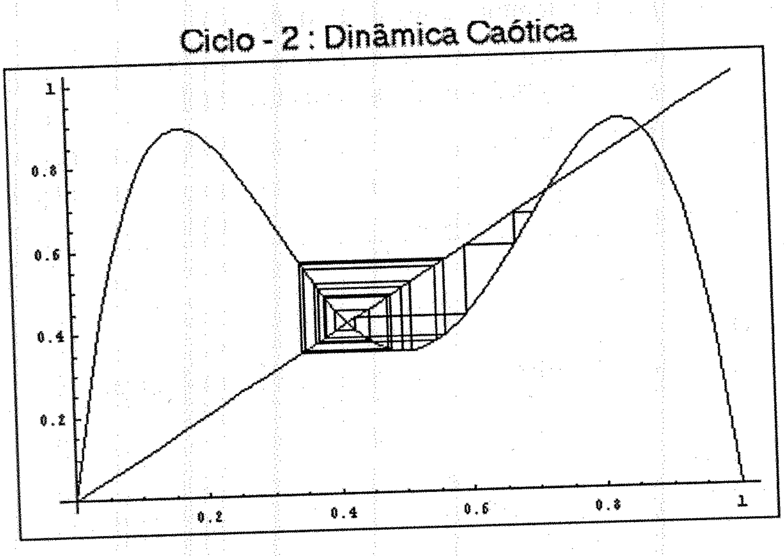


Figura 14

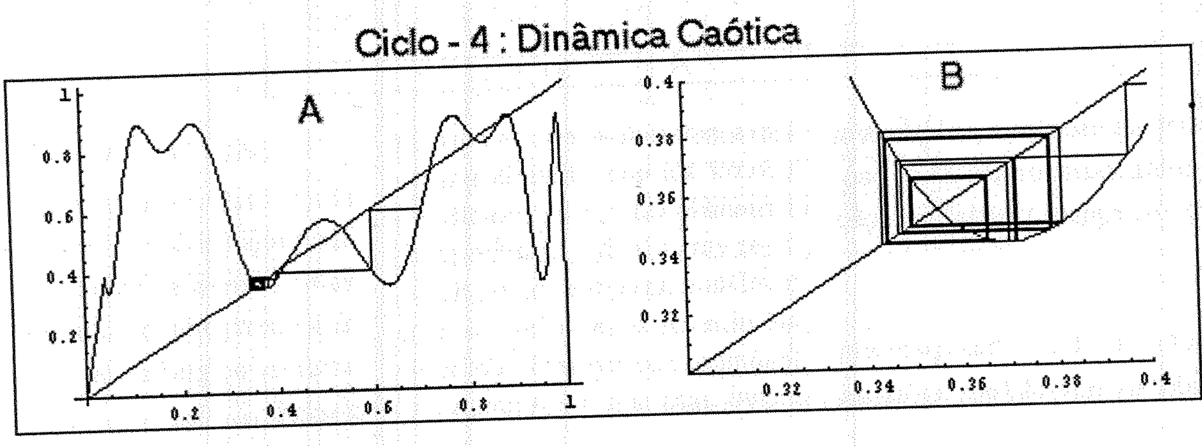
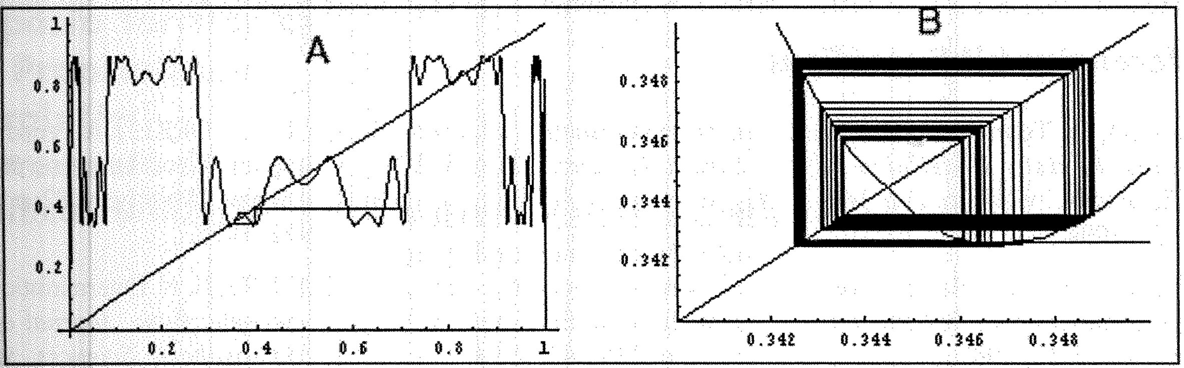


Figura 15

Ciclo - 8 : Dinâmica Caótica



Resumindo para todos os valores de μ que estejam dentro deste intervalo, $3.5699 < \mu < 4$, o mapa logístico apresentará trajetórias caóticas. É importante ressaltar que apesar de apresentar ciclos infinitos, as trajetórias serão próximas umas das outras, *i. e.*, todos os valores na vizinhança de p_0 apresentarão órbitas próximas, mas nunca coincidentes, esta característica é conhecida como "estabilidade do ciclo limitado infinito".

4. Conclusão

A Teoria do Caos apesar da sua complexidade matemática está se tornando a base matemática mais importante para os economistas que estudam as flutuações endógenas da economia. O próprio desenvolvimento da teoria econômica, curiosamente, costuma passar por ciclos, *e.g.*. Na década de 40 foram grandemente utilizados os modelos endógenos para explicar as flutuações da economia, mas foi abandonado, quase que por completo, durante as próximas décadas. Os modelos de choques externos foram amplamente utilizados, principalmente porque os modelos de propagação de impulsos podiam ser transformados em modelos econométricos do tipo autoregressivo de primeira ordem. Atualmente sabemos que os modelos não-lineares e dinâmicos, quando apresentam caos, produzem movimentos que parecem com os obtidos com os modelos autoregressivos de primeira ordem, mostrando que os modelos endógenos podem, afinal, explicar várias características internas da economia, não precisando, como geralmente costumava ocorrer, lançar-se mãos de recursos exógenos da economia com o fim de gerar flutuações econômicas.

A Teoria do Caos provavelmente não teria muita utilidade, se não fosse a sua característica de *universalidade*, isto é, a existência de algum padrão[30] de ordem, uma vez que caos, aqui, não significa desordem. Esta descoberta é fascinante para os economistas teóricos ou não, pois, processos simples, produzindo uma miríade de complexidades sem aleatoriedade, isto significa que apenas precisamos combinar um modelo não-linear com um processo de retroalimentação - que já é tão comum aos economistas matemáticos - para podermos criar um modelo caótico que explique as flutuações econômicas a partir de pressuposto de que os mecanismos de mercado são predominantemente instáveis devido às forças internas da economia.

As implicações são inúmeras, a literatura sobre caos em economia cresce em uma velocidade espantosa, provavelmente sinalizando o caminho que devemos seguir para atingirmos o sonho dos grandes pensadores do passado: a construção de um modelo simples para explicar o comportamento geral da economia. Provavelmente eles não estavam se referindo a modelos

[30] *Seria mais correto dizer que possuem comportamentos semelhantes no longo prazo.*

simples que apresentassem dinâmicas complexas.

As técnicas matemáticas durante estes últimos 120 anos de história econômica modificaram-se bastante, adequando-se às novas necessidades dos economistas que agora perscrutam profundamente os fenômenos econômicos, buscando assim, a tão desejada ordem por traz do caos.

Referências bibliográficas

ARAÚJO, A. Teoria econômica e caos. *Revista Brasileira de Economia*, v. 48, n. 2, p. 147-153, 1994.

ARSTEIN, Z. Irregular cobweb dynamics. *Economic Letters*, n. 11, p. 15-17, 1983.

BAI, H.L. *Chaos*. Singapore: Worldscientific, 1989.

BAUMOL, W. J., QUANDT, R. E. Chaos models and their implications for forecasting. In: TRIPPI, R. *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*. Irwin Professional Publishing, 1995.

BOLDRIN, M., WOODFORD, M. Equilibrium models displaying endogenous fluctuations and chaos: a survey. In: BENHABIB, J. *Cycles and chaos in economic equilibrium*, Priceton University Press, 1992.

CHIARELLA, C. The Cobweb model: its instability and the onset of chaos. *Economic Modelling*, p. 377-384, 1984.

CVITANOVIC, P. *Universality in chaos*. N.Y. : Adam Hilger, 1989.

DAMÁSIO, J. Dinâmica econômica e caos : para uma agenda de pesquisa. *Revista Brasileira de Economia*, v. 48, n. 2, p. 155-178, 1994.

FEIGENBAUM, M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, v. 21, n. 6, 1979.

FERNANDES, M., GLEISER, I. A questão da dinâmica de preços de ativos financeiros. *Revista Brasileira de Economia*, v. 48, n. 2, p. 235-243, 1994.

FINKENSTÄDT, B., KUHBIER, P. Chaotic dynamics in agricultural markets. *Annals of Operations Research*, v. 37, 1992.

GANDOLFO, G. *Economic dynamics*. Springer-Verlag, 1997.

GLEICK, J. *Caos: a criação de uma nova ciência*. Campus, 1987.

GRANDMONT, J. M. On endogenous competitive business cycles. In: BENHABIB, J. *Cycles and chaos in economic equilibrium*, Priceton University Press, 1992.

GRANDMONT, J.M. *Nonlinear economic dynamics*. Academic Press, 1987.

HOLMES, J.M., MANNING, R. Memory and market stability: the case of the cobweb. *Economic Letters*, v. 28, p. 1-7, 1988.

HOMMES, C. H. Adaptive learning and roads to chaos: the case of cobweb. an economist's guide. In: TRIPPI, R. *Chaos & nonlinear dynamics in the financial markets*. Irwin Professional Publishing, 1995.

LI, T. Y., YORKE, J. A. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, v. 82, p. 985-992, 1975.

LORENZ, E. N. Deterministic non periodic flow. *Journal of th Atmospheric Sciences*, v. 2(n. 2, 1963.

MAY, R. M. Simple mathema cal models with very comp cated dynamics. *Nature*, 261, 1976.

MEDIO, A. *Chaotic dynamic theory and applications economics*. Cambridge Univ sity Press, 1992.

SAVIT, R. When random is random: an introduction to c in market prices. In TRIPP *Chaos & nonlinear dyna in the financial markets*. I Professional Publishing, 1

STEWART, J. The geometry of c In: *The unity of science*, b haven lecture series, n. 1984.

WEISS, M. D. Nonlinear and tic dynamics. In TRIP *Chaos & nonlinear dy in the financial markets* Professional Publishing

ZARNOWITZ, V. Recent w business cycles in the hi perspective: a review theories and evidence. *of Economic Literature*, 523-580, 1985.

* *Professor do Departamento de Economia da FCG/UNA e do Núcleo de Pesquisa do IPAT.*